Περί αναλογικών συστημάτων στην αρχιτεκτονική

Βασικές αρχές αισθητικής και αναλογιών των κατασκευών

•Νικόλαος Λιανός
•Επ. Καθηγητής
•ΤΑΜ/ΔΠΘ

Εισαγωγή

- Έχοντας αφιερώσει τους δύο προηγούμενους κύκλους μαθημάτων στην έρευνα και μελέτη της κατασκευής ενός μνημείου ή αρχιτεκτονικού έργου γενικά, η ανάλυσή του ολοκληρώνεται φέτος με τη μελέτη της σύνθεσης της μορφής του, της αρχιτεκτονικής έκφρασης και των διακοσμητικών στοιχείων του, στοιχεία τα οποία ταυτόχρονα θα προσέφεραν το υλικό για μια περαιτέρω έρευνα στην αρχιτεκτονική καθαρά από αισθητική άποψη.
- Στα πλαίσια του μαθήματος, δεν θεωρείται χρήσιμο η ανάλωση σε αισθητικές αναζητήσεις όπως η διερεύνηση της ιδανικής ομορφιάς, αισθητική ανάλυση κλπ., διότι είναι προφανές ότι βασικά ακολουθούμε το προσωπικό ύφος ή «γούστου» ή επηρεαζόμαστε περισσότερο ή λιγότερο από τις επιθυμίες της κοινωνίας κάθε περιόδου.
- Αντίθετα όμως, για την ανάπτυξη και διερεύνηση των συνθετικών ικανοτήτων, θα ήταν επιθυμητή η ανάπτυξη ορισμένων αρχών των αναλογιών που δεν αλλάζουν με την «μόδα» ή με το πέρασμα του χρόνου διότι θεωρείται ότι βασίζονται στους νόμους της φύσης οι οποίοι και θεωρούνται αμετάβλητοι.

Εισαγωγή 2

- Από την εποχή του Viollet-Le-Duc και την περίοδο της Ορθολογιστικής Σχολής (Razionalismo), παρατηρείται μια τεράστια διαφορά μεταξύ της θεωρίας και της πράξης (εφαρμογής) στην αρχιτεκτονική.
- Διαβάζοντας π. χ. το «*Entretiens sur L΄Architecture*» του Viollet-Le-Duc, καθώς και το «*L΄Architecture, Le passé e le present*» του Baudot, παρατηρούμε τη μεγάλη διαφορά μεταξύ της θεωρητικής προσέγγισης των συνθετικών αρχών που αναπτύχθηκε δια μέσου των κειμένων τους και της πρακτικής εφαρμογής της στα αρχιτεκτονικά έργα τους.
- Αντίστοιχα μπορούμε ν' αναφερθούμε για τις θεωρίες που αναπτύχθηκαν σε άλλες Ευρωπαϊκές χώρες, όπως αυτές του John Ruskin ή του Pugin καθώς και πολλών άλλων, που παρόλο το υψηλό φιλοσοφικό περιεχόμενο των κειμένων τους δεν επηρέασαν ουσιαστικά τη συνθετική δημιουργία της σύγχρονης αρχιτεκτονικής.
- Και αυτό διότι κατά βάθος, όταν καλλιτέχνης δημιουργεί, ακολουθεί πιο ευχάριστα την εσωτερική (ψυχική) ευαισθησία του από τη λογική και το βάθος των φιλοσοφικών θεωριών.

Εισαγωγή 3

- Στη σειρά αυτή των μαθημάτων, θα αναφερθούμε αρχικά σε νόμους και κανόνες που η χρήση τους, κατά το παρελθόν τουλάχιστον, θεωρήθηκε απαραίτητη για την αισθητική, τουλάχιστον, επιτυχία μιας αρχιτεκτονικής σύνθεσης και κατ'επέκταση στη κατανόηση των μορφών γενικά.

- Κάτω από αυτή την οπτική, θεωρούμε ότι το αρχιτεκτονικό στυλ διαμορφώθηκε σύμφωνα τις εκάστοτε ιδεολογικοκοινωνικές συνθήκες και βασικά λόγο της ύπαρξης διαφορετικών *στατικοκατασκευαστικών* κριτηρίων καθώς και των *υλικών* που χρησιμοποιήθηκαν.
- Όμως η δημιουργική σύνθεση των παραπάνω στοιχείων με σκοπό την αρμονική δημιουργία ενός αρχιτεκτονικού «οργανισμού», υπήρξε μια πολύπλοκη διαδικασία και τουλάχιστον μέχρι τον προηγούμενο αιώνα βασιζόταν σε γεωμετρικές, φιλοσοφικές και μεταφυσικές θεωρίες.
- Στις επόμενες σελίδες γίνεται συνοπτική αναφορά στις βασικές σ[illegible]τικές αρχές [illegible]αναπτύχθηκ[illegible]πό τη αρχαιότητ[illegible]

ΑΝΑΛΟΓΙΑ
(pro-portio)

- Σύμφωνα με τον Βιτρούβιο, αναλογία είναι η δυνατότητα μέτρησης κάθε αρχιτεκτονικού μέλους ενός έργου δια μέσου μιας ορισμένης μονάδας (De Architettura, βιβλίο I).
- *La proportio,* είναι ο υπολογισμός που βασίζεται σε ένα αριθμό ο οποίος «διαιρεί όλα τα μέρει του κτηρίου χωρίς κανένα υπόλοιπο».
- Σύμφωνα με τον Πλάτωνα (Τίμαιος), «είναι αδύνατο να συνδυαστούν καλά δύο πράγματα χωρίς ένα τρίτο: είναι απαραίτητο μεταξύ τους να υπάρχει μία σχέση που τα ενώνει. Και δεν υπάρχει καλύτερη σχέση από αυτή που τα καθιστά μία ενότητα.
- Ο Αριστοτέλης αναφέρει: Αναλογία είναι η ισότητα των σχέσεων (Ηθική, Νικομάχεια, 5, 6).
- Daniel Barbaro (μεταφραστής του Vitruvio, 1556). Ορίζει την **αναλογία** μεταξύ δύο μεγεθών σαν τη σχέση μεταξύ τους και την **αναλογικότητα** (proportionalita`), σαν τη σύγκριση όχι ενός μεγέθους προς ένα άλλο, αλλά μιας αναλογίας προς μια άλλη.
- Ο Πλάτωνας θεωρεί ότι η αρμονία και η τάξη του κόσμου βρίσκεται σε ορισμένους αριθμούς όπως πρόοδος 1, 2, 3, 4, 8, 9, 27, που εμπεριέχει τον μυστικό ρυθμό του μικρόκοσμου και μακρόκοσμου.

Αναλογία αρμονία και αισθητική

Πλάτων:

«Το αγαθό βέβαια είναι πάντα ωραίο και στο ωραίο δεν λείπει ποτέ η αναλογία».

Πυθαγόρειοι:

•«υπάρχει μια σχέση ανάμεσα στα όντα που συνδέονται με πλήθος αναλογιών».

•«όλα τα στοιχεία του κόσμου διέπονται από το λόγο, την αρμονία, το ρυθμό».

•Το κάλος θεωρήθηκε μια συμφωνία, μια αρμονική σύνδεση των μερών ενός όλου μεταξύ τους.

•Η αναλογία σ' ένα γεωμετρικό σχήμα, μια μουσική κλίμακα ή μαθηματική ακολουθία είναι μια αρμονική σχέση ανάμεσα στα μέρη κα το όλο.

•**L.B. Alberti**:

«ομορφιά: αρμονικό μέσο ανάμεσα σε δύο άκρα».

Αναλογία αρμονία και αισθητική

L. B. Alberti (από «Δέκα βιβλία της Αρχιτεκτονικής» 1452):

Οι αρχαίοι[..]πρότειναν κυρίως τη μίμηση της Φύσης σαν το μεγαλύτερο αρχιτέκτονα σε όλους τους τρόπους των συνθέσεων […]. Θα ασχοληθούμε τώρα με το σχήμα: σαν σχήμα κατανοώ μια ορισμένη αμοιβαία αντιστοιχία εκείνων των πολλών γραμμών, με τις οποίες μετριούνται οι αναλογίες, από τις οποίες η μία είναι το μήκος, η άλλη είναι το πλάτος και η άλλη είναι το ύψος. Ο κανόνας αυτών των αναλογιών *συμπεραίνεται καλύτερα από εκείνα τα πράγματα, στα οποία βρίσκουμε τη Φύση να είναι πληρέστερη και θαυμαστή*, και πράγματι πείθομαι κάθε μέρα όλο και περισσότερο για την αλήθεια του ρητού του Πυθαγόρα ότι η Φύση ενεργεί με συνέπεια και με σταθερή αναλογία σε όλες τις λειτουργίες της. Απ' όπου συμπεραίνω ότι οι ίδιοι αριθμοί, μέσω των οποίων η συμφωνία των ήχων επηρεάζει τα αυτιά μας με ευχαρίστηση είναι ακριβώς αυτοί που ευχαριστούν τα μάτια μας και το μυαλό μας. Θα δανειστούμε, επομένως όλους τους κανόνες για την ολοκλήρωση των αναλογιών μας από τους μουσικούς που είναι οι μεγαλύτεροι διδάσκαλοι γι'αυτό το είδος των αριθμών και από εκείνα τα πράγματα στο οποία η Φύση δείχνεται πιο εξαιρετική και πλήρης.

ΑΝΑΛΟΓΙΑ:
Ισότητα δύο πηλίκων
(αριθμητική σχέση μεταξύ τεσσάρων μεγεθών)

$$\alpha/\beta=\gamma/\delta$$

Αριθμητική αναλογία: $(\beta-\alpha)/\alpha=(\gamma-\beta)/\beta$

Γεωμετρική αναλογία: $\alpha/\beta=\beta/\gamma$

Αρμονική αναλογία: $(\alpha-\beta)/(\beta-\gamma)=\alpha:\gamma$

Παλλάδιο: στο βιβλίο του αναφέρεται στα τρία παραπάνω είδη αναλογών για τη σύνθεση των χώρων στις κατασκευές του.

Ο Αριθμητικός μέσος

Ο Αριθμητικός μέσος δύο αριθμών α και β είναι ο αριθμός Χ που ισαπέχει και από τους δύο.

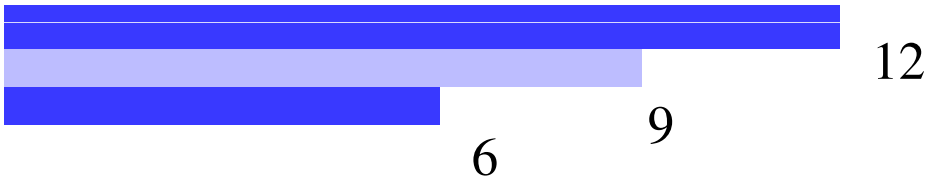
Δηλαδή: $\chi-\alpha=\beta-\chi$

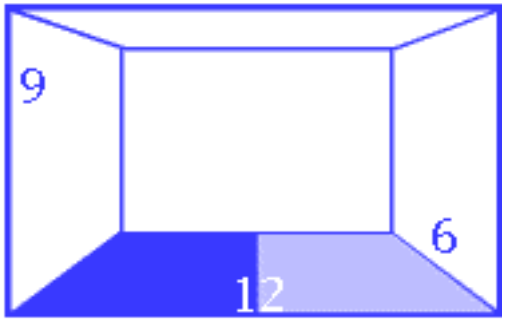
Ισχύει: $\chi= (\alpha+\beta)/2$

Ο αριθμητικός μέσος ισούται με το ημιάθροισμα των δύο αριθμών α και β. Λέγεται αριθμητικός μέσος γιατί τρεις αριθμοί α,β και γ, αποτελούν αριθμητική πρόοδο με διαφορά $\chi = (\gamma-\alpha) = (\beta-\alpha)/2$.

<u>Σύμφωνα με τον Παλλάδιο</u>: έστω αίθουσα που έχει μήκος 12 και πλάτος 6 μέτρα. Προσθέστε 6+12 =18. Το μισό =18/2=9. Η οροφή οφείλει να έχει ύψος 9 (εννέα) μέτρα.

Δηλαδή: πλάτος= (6 + 3) = μήκος (12 –3).



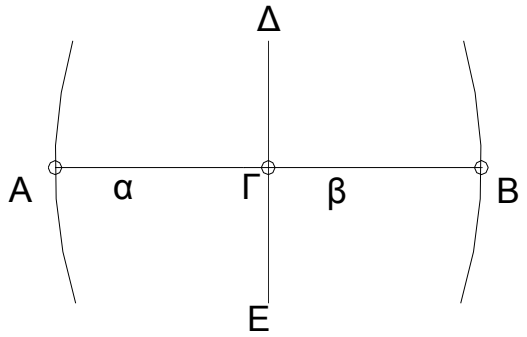


Γεωμετρική κατασκευή του Αριθμητικού μέσου

Δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και β να βρεθεί το ευθύγραμμο τμήμα Χ που είναι ο αριθμητικός μέσος.

Λαμβάνουμε το πρώτο από τα δύο δοθέντα προεκτείνουμε και λαμβάνουμε το δεύτερο στην προέκτασή του.

Αρκεί να διχοτομήσουμε το τμήμα ΑΒ βρίσκοντας το μέσο Γ. Τότε ΑΓ=ΓΒ = το ζητούμενο.



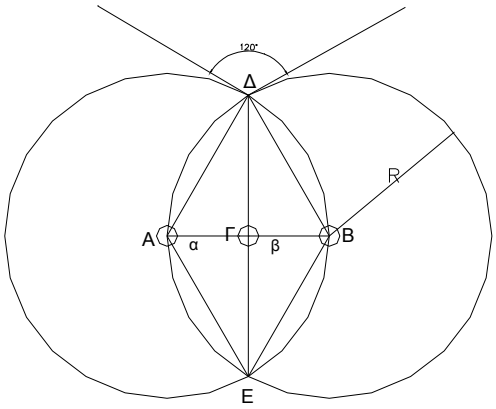
Διχοτόμηση: κατασκευάζουμε τους ίσους κύκλους (Α,ΑΒ) και (Β,ΒΑ) οι οποίοι περνούν ο ένας από το κέντρο του άλλου και τέμνονται στο Δ και Ε. Η ΔΕ τέμνει το ΑΒ στο μέσο Γ

Γεωμετρική κατασκευή του Αριθμητικού μέσου

- Σύμφωνα με την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει το χαρακτηριστικό σχέδιο της Vesica piscis-«κύστη ιχθύος» (σχήμα του οποίου κάθε κύκλος περνάει από το κέντρο του άλλου) και θεωρείται ένα τα ιερά γεωμετρικά σχήματα που χρησιμοποιήθηκε εκτεταμένα κατά το Μεσαίωνα στη χριστιανική τέχνη.

- Ιδιότητες της Vesica piscis:

- Η διάκεντρος ΑΒ=R
- Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΒ είναι ισόπλευρα
- Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος
- Η γωνία των εφαπτόμενων στο Δ και Ε είναι 120°

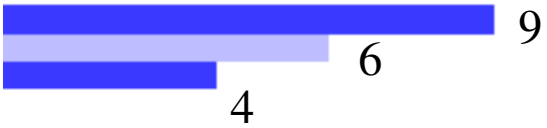


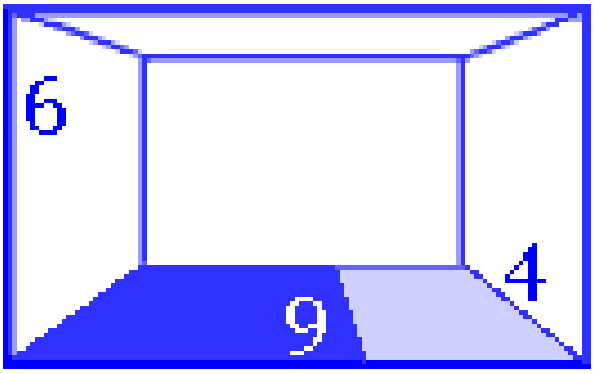
Ο Γεωμετρικός Μέσος

- Δοθέντων δύο θετικών αριθμών α και β, ορίζεται ο γεωμετρικός μέσος Χ για τον οποίο ισχύει:
- $\alpha / X = X / \beta \Rightarrow X^2 = \alpha\beta$ ή $X = \sqrt{\alpha\beta}$
- Ο γεωμετρικός μέσος δύο αριθμών α και β ισούται με την ρίζα του γινομένου των δοθέντων.
- Δηλ. οι αριθμοί α, $\sqrt{\alpha\beta}$(=Χ) και β βρίσκονται σε γεωμετρική πρόοδο.

<u>Σύμφωνα με το Παλλάδιο</u>:

- αίθουσα μήκος 9 και πλάτος 4, το ζητούμενο ύψος της σύμφωνα με το γεωμετρικό μέσο θα είναι $Y=\sqrt{4.9}=\sqrt{36}=6$ μέτρα. Δηλαδή η αίθουσα θα έχει πλάτος 4, ύψος 6, και μήκος 9 μέτρα.



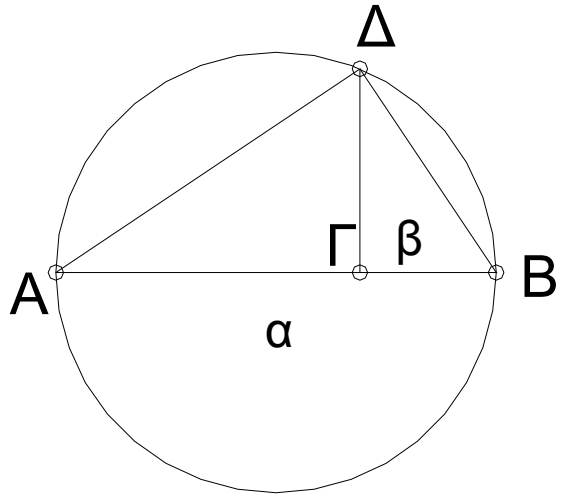


Η Γεωμετρική κατασκευή του Γεωμετρικού μέσου.

•Δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και β να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα

Χ= γεωμετρικός μέσος ανάλογος των α και β.

Λαμβάνουμε ΑΒ=α και ΒΓ=β, κατασκευάζουμε κύκλο με διάμετρο ΑΒ και φέρουμε ΓΔ κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την περιφέρεια του κύκλου στο Δ.. Το τμήμα ΓΔ είναι το ζητούμενο διότι: η γων. ΑΔΒ σαν εγγεγραμμένη είναι 90°. Το ΓΔ είναι το ύψος ορθογωνίου τριγ. ΑΔΒ στην υποτείνουσα ΑΒ. Ως γνωστό, το ύψος ενός ορθογωνίου τριγώνου που φέρεται στην υποτείνουσα, είναι μέσος ανάλογος των δύο τμημάτων που ορίζει επί της υποτείνουσας. Επομένως, το ΓΔ είναι μέσος ανάλογος των α και β (των τμημάτων που χωρίζει την υποτείνουσα).



Ο Αρμονικός μέσος

Αρμονικός μέσος δύο αριθμών α και β είναι ο αριθμός Χ σύμφωνα με τον οποίο:

$$(X-\alpha)/\alpha=(\beta-X)/\beta \Rightarrow X=2\alpha\beta / (\alpha+B).$$

Δηλαδή ο αρμονικός μέσος δύο αριθμών α και β είναι ο αριθμός που ισούται με το διπλάσιο γινόμενο των δύο αριθμών δια του αθροίσματός τους.

Έτσι οι α, Χ, β, αποτελούν αρμονική πρόοδο.

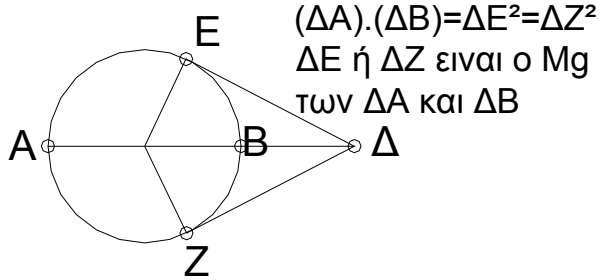
<u>Σύμφωνα με τον Παλλάδιο</u>**:**

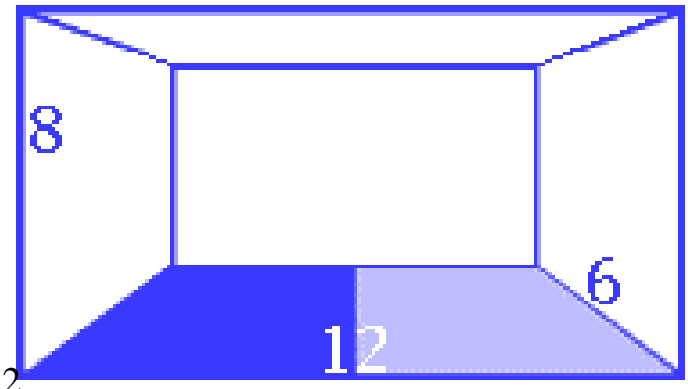
δωμάτιο μήκους 6μ. και πλάτος 3μ., θα έχει ύψος Χ= (2.3.6) / (3+6)=36 / 9 = 4 .

Δηλ. π=3, h=4, μ=8.

Ιδιότητα: Ο Γεωμετρικός μέσος Mg είναι ο μέσος ανάλογος του αριθμητικού μέσου (Ma) και του Αρμονικού μέσου (Mh).

Mh=Mg / Ma.





Ο Αρμονικός μέσος: Γεωμετρική κατασκευή

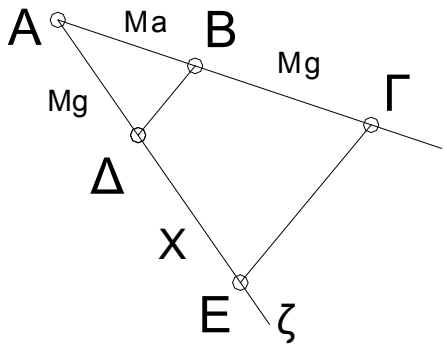
Δοθέντων δύο ευθυγράμμων τμημάτων α και β, να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα Χ το οποίο να είναι ο αρμονικός μέσος (Mh) των α και β. Δηλ.Χ=2(α-β)/α+β.

Σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα, αν κατασκευάσουμε πρώτα τον αριθμητικό μέσο (Ma) και τον γεωμετρικό (Mg), το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή του ευθυγράμμου τμήματος $X=Mg^2/Ma$.

Επίσης η κατασκευή του Χ μπορεί να γίνει σαν η κατασκευή της 4ης ανάλογου, με τις ιδιότητες του ύψους του ορθογωνίου στην υποτείνουσα κ.α.

Τρόπος κατασκευής της 4η αναλόγου:

$X=Mg^2/M\alpha \Rightarrow Ma/Mg = Mg/X$

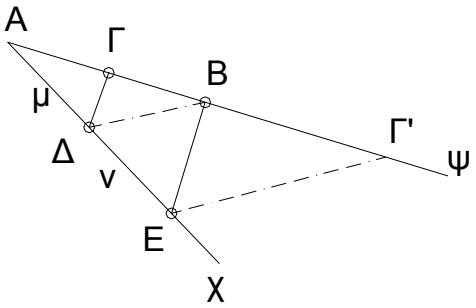


Θεωρούμε τις ευθειες ΑΒ=Ma και ΒΓ=Mg.
Επί της ημιευθειας Αζ λαμβάνουμε ΑΔ=Mg. Φερνουμε τη ΒΔ και μετά τη ΓΕ παράλληλη προς τη ΒΔ που τεμνει την Αζ στο Ε. Το τμήμα ΔΕ

Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε δοθέντα λόγο

Δίδεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ζητείται να χωριστεί εσωτερικά σε δοθέντα λόγο μ:ν

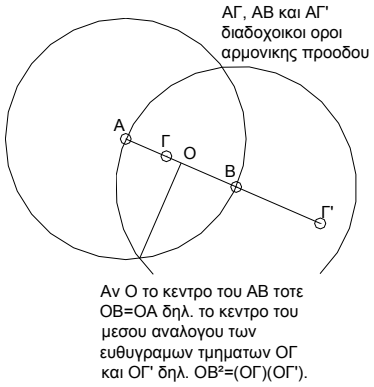
Πάνω σε τυχαία ημιευθεία Αχ λαμβάνουμε διαδοχικά τα ΑΔ=μ και ΔΕ=ν. Φέρνουμε την ΕΒ και από το Δ τη ΔΓ//ΕΒ που τέμνει το ΑΒ στο Γ. Το σημείο Γ είναι το ζητούμενο και εσωτερικό σημείο διαίρεσης του ΑΒ:



ΓΑ / ΓΒ = μ / ν.

Επίσης αν φέρουμε την ΔΒ και από το Ε παράλληλη στη ΔΒ, τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Γ'. Το Γ' είναι το εξωτερικό σημείο διαίρεσης του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ στο δοθέντα λόγο (Γ'Α/Γ'Β=μ/ν).

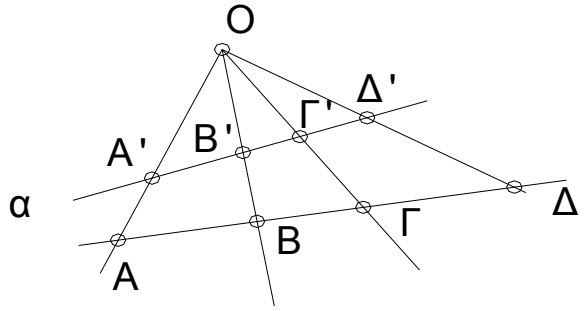
- Γ και Γ' διαιρούν αρμονικά το ΑΒ.
- Γ και Γ' είναι συζυγή αρμονικά των Α και Β
- Α,Β,Γ,Δ, αποτελούν αρμονική τετράδα,
- Α,Β,Γ,Δ, αποτελούν αρμονική σημειοσειρά.



Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε δοθέντα λόγο

Αν Ο (κορυφή) είναι σημείο εκτός αρμονικής τετράδας σημείων Α,Β,Γ,Δ, και φέρουμε τις ευθείες (ακτίνες) ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ,ΟΔ σχηματίζεται μια δέσμη ευθειών που ονομάζεται αρμονική δέσμη.

Τυχαία ευθεία α που δεν διέρχεται από την κορυφή Ο τέμνει τις ακτίνες μιας αρμονικής δέσμης ευθειών σε 4 σημεία που αποτελούν επίσης αρμονική τετράδα, ανεξάρτητα από τη θέση της (α).



Η 4η ανάλογος

Δίδονται τέσσερις αριθμοί

α, β, γ, δ,

Έτσι ώστε να σχηματίζουν αναλογία α/β=γ/δ.

Παρατηρούμε ότι:

α, δ = ακραίοι όροι

α, γ = ηγούμενοι όροι

β, δ = επόμενοι όροι

δ = 4ος ανάλογος των α,β,γ

Ιδιότητα:

το γινόμενο των μεσαίων=γινόμενο ακραίων

(α Χ β=γ Χ δ)

Ο λόγος (πηλίκο) των ηγουμένων=

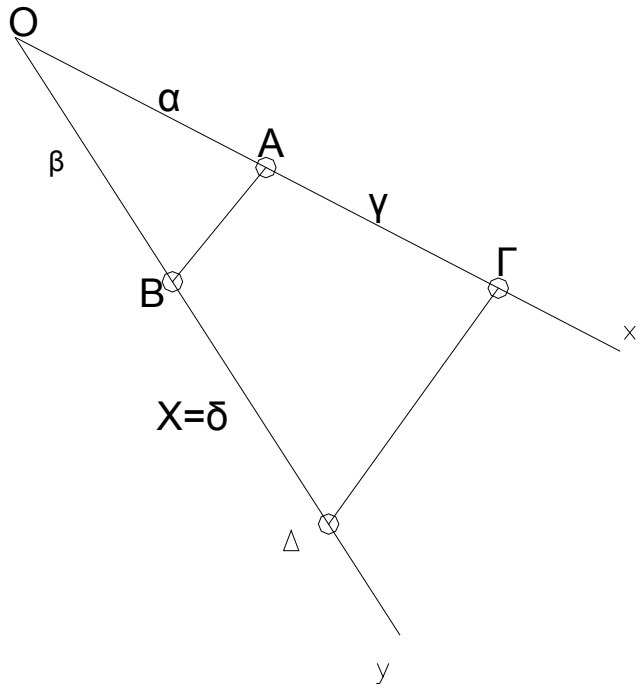
λόγο των επομένων (α / γ = β / δ)

Αναλογία τεσσάρων ευθύγράμμων τμημάτων

- Προκειμένου να εφαρμόσουμε στο χώρο την προηγούμενη ιδιότητα, θεωρούμε ότι το 4ο τμήμα είναι η τέταρτη ανάλογος μεταξύ των α, β, και γ.
- Κατασκευή: δοθέντων α, β, γ να βρεθεί το δ, δηλαδή να κατασκευαστεί ευθύγραμμο τμήμα Χ έτσι ώστε

α/β = γ/Χ.

- Κατασκευή βάση θεωρήματος του Θαλή:
- Οχ=ημιευθεία,
- ΟΑ=α,
- ΑΓ=γ,
- ΟΒ=β



- Φέρνω την ΑΒ και
- από το Γ την ΓΔ//ΑΒ.
- Το ευθύγραμμο τμήμα

ΒΔ=χ=δ είναι η 4η ανάλογος

Πυθαγόρας: Μουσική και Χώρος

•Η μουσική στους αρχαίους δεν είχε μοναδικό σκοπό τη δημιουργία ευχάριστων συναισθημάτων ή απλώς την ψυχαγωγία των ανθρώπων. Απέβλεπε κυρίως στον εξευγενισμό και την κάθαρση της ανθρώπινης ψυχής έτσι ώστε να αποτελεί μέρος της «θείας ή ουράνιας αρμονίας».

•Οι αναλογίες και οι αρμονίες της μουσικής επηρέασαν πολύ την αστρονομία, τη γεωμετρία και κατ' επέκταση την αρχιτεκτονική.

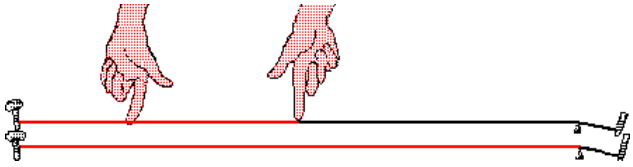
•Οι Πυθαγόρειοι μελέτησαν τις σχέσεις των μουσικών τόνων και των αρμονιών και ανακάλυψαν ότι αυτές εκφράζονται με μεγάλη ακρίβεια με απλούς αριθμητικούς λόγους. Λέγεται ότι ο Πυθαγόρας ανακάλυψε αυτές τις σχέσεις παρατηρώντας ένα σιδηρουργό που χτυπούσε το αμόνι του. Ο κρότος διέφερε ανάλογα με τη δύναμη του σφυριού, όπως επίσης και ο ήχος μιας χορδής την οποία διαίρεσε σε διάφορα τμήματα. Ο αριθμός (δύναμη του σφυριού στην πρώτη περίπτωση, διάστημα χορδής στη δεύτερη) φάνηκε να διέπει το μουσικό τόνο.

Αν ορίσουμε 1:1 μια πλήρη χορδή, τότε στο λόγο 3:4 (*τετάρτη*) θα έχουμε τη συμφωνία του **διατέσσερα**, στο λόγο 2:3 (*πέμπτη*) τη συμφωνία του **διαπέντε** και στο λόγο 1:2 τη συμφωνία του **διαπασών**.

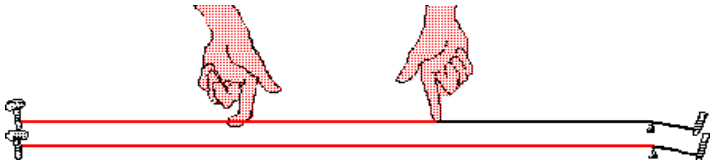
<u>Σχέση μουσικής και αρχιτεκτονικής</u>:

Θα δανειστούμε, [..] *όλους τους κανόνες για την ολοκλήρωση των αναλογιών μας από τους μουσικούς που είναι οι μεγαλύτεροι διδάσκαλοι* [..] *και από εκείνα τα πράγματα στα οποία η Φύση δείχνεται πιο εξαιρετική και πλήρης. Leon Battista Alberti*

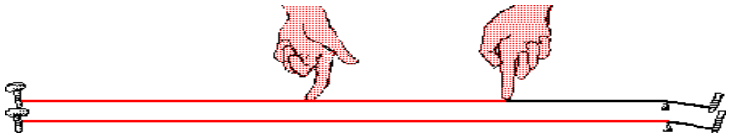
Πυθαγόρας: Μουσική και Χώρος



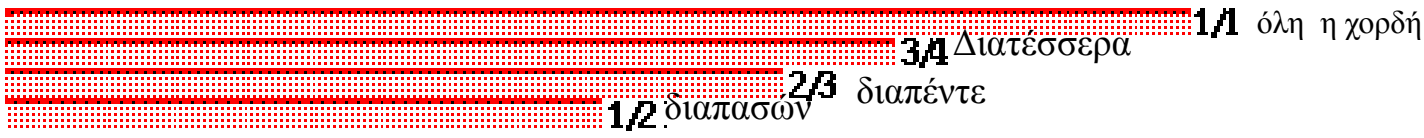
Ο Πυθαγόρας (6ος αι, π.Χ.), παρατήρησε ότι αν σε δυο χορδές ίδιας τάσης, διαιρέσουμε την μία στη μέση, ο ήχος της είναι κατά μια **οκτάβα** ψηλότερος.



αν η σχέση των δύο χορδών είναι 2:3, η διαφορά στο ύψος του ήχου ονομάζεται **πέμπτη**



αν η σχέση των δύο χορδών είναι 3:4, η διαφορά στο ύψος του ήχου ονομάζεται **τέτάρτη**

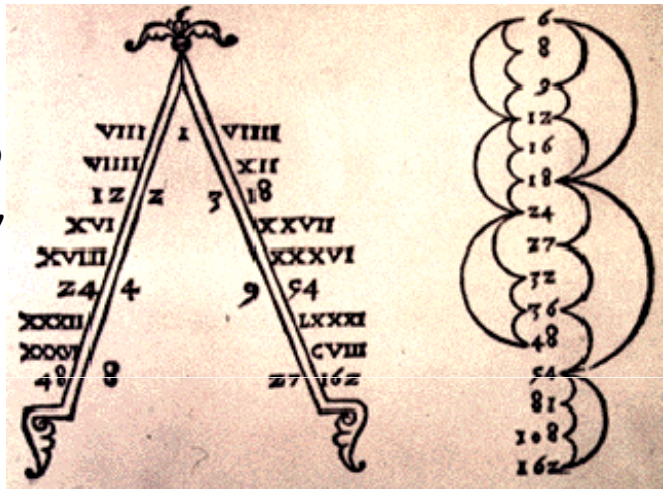


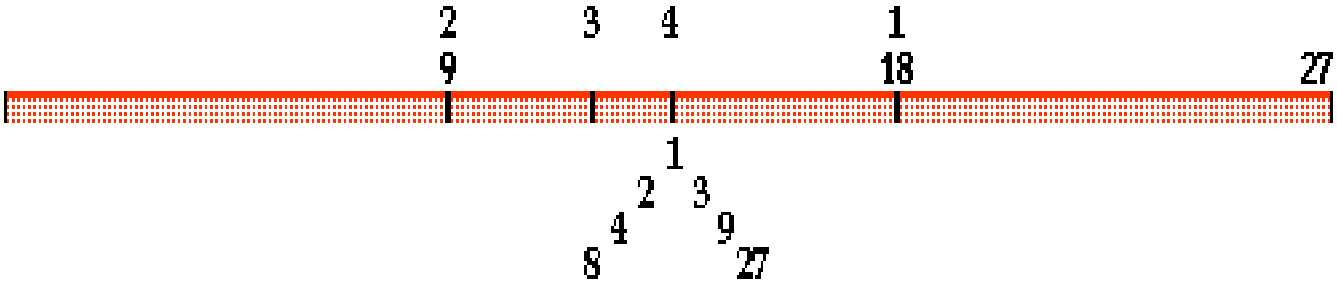
Πυθαγόρας: Μουσική και Χώρος

Η ανακάλυψη του Πυθαγόρα όχι μόνον αποτέλεσε τη βάση του ελληνικού μουσικού συστήματος αλλά φαίνεται ότι θεωρήθηκε το μυστικό της τάξης και της αρμονίας του σύμπαντος.

Όπως παρατηρεί ο Wittkower, στην ανακάλυψη αυτή στηρίχθηκε ο συμβολισμός και ο αριθμητικός μυστικισμός που επηρέασε την ανθρώπινη σκέψη για τις επόμενες δύο χιλιετίες.

Στο δρόμο των Πυθαγορείων, ο Πλάτωνας στον *Τίμαιο,* εξηγεί ότι η τάξη και η αρμονία του σύμπαντος συμπεριλαμβάνονται σε ορισμένους αριθμούς. Έτσι, επανεντοπίζει την αρμονία σε τετράγωνα και σε κύβους με συγκεκριμένες αναλογίες ξεκινώντας από τη μονάδα και καταλήγει σε δύο γεωμετρικές προόδους: την 1, 2, 4, 8 και 1, 3, 9, 27. Οι σχέσεις αυτές απεικονίζονται με τη μορφή του Λ (βλ. σχήμα) που εκφράζει την κοσμική αρμονία. Σύμφωνα πάντα με τον Πλάτωνα, οι επτά παραπάνω αριθμοί (1, 2, 3, 4, 8, 9, 27) εμπεριέχουν το μυστικό ρυθμό του σύμπαντος διότι σε αυτούς, εκτός από τις μουσικές αρμονίες, συμπεριλαμβάνεται και η μουσική των ουρανών και της ανθρώπινης ψυχής.





ΑΝΑΛΟΓΙΑ

Γεωμετρικές χαράξεις

Ο Andrea Palladio, (1508-1580) στο βιβλίο του «Τα IV βιβλία της Αρχιτεκτονικής», που δημοσιεύτηκε το 1570, προτείνει επτά συστήματα χάραξης των «πιο όμορφων και αρμονικών αναλογιών». Για την σύνθεσητων χώρων, επέλεξε διαστάσεις που αντιστοιχούν σε μουσικές αναλογίες.

1. Κύκλος

2. τετράγωνο 1:1

1:1

3. Η διαγώνιος του τετραγώνου 1:√2

1:1.414....etc.

4. Τετράγωνο και 1/3

3:4

5. Τετράγωνο και 1/2

2:3

6. Τετράγωνο και 2/3

3:5

7. Διπλό τετράγωνο

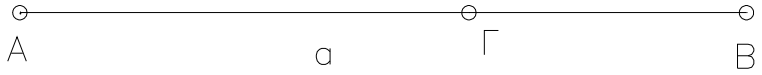
1:2

Ο αριθμός Φ: χρυσός μέσος και η χρυσή τομή

- Ο αριθμός αυτός θεωρήθηκε από την αρχαιότητα μια «θεία αναλογία», στενά συνυφασμένη με την αίσθηση του κάλους και της αρμονίας. Αντιπροσωπεύει έτσι τα μαθηματικά της ομορφιάς, την εξωτερίκευση, την υλοποίηση της αφηρημένης ιδέας του Κάλλους από τον κόσμο των ιδεών ή αριθμών στο κόσμο των μορφών και των σχημάτων, τη θεία αρμονία πραγματοποιούμενη στο πεδίο της γεωμετρίας με τη διαίρεση ενός όλου σε δύο αρμονικά μέρη, την παρεμβολή ενός παναρμονικού μέσου ανάμεσα σε δύο σύμφωνα άκρα.
- Το Φ εμφανίζεται και στη σύγχρονη θεωρία του χάους καθώς και σε διάφορα φράκταλς υποδηλώνοντας την αόρατη τάξη της υποτιθέμενης χαοτικής δομής.
- Στα μαθηματικά, ορίζεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη ως η τομή ενός δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο. Δηλαδή σε δύο τμήματα, από τα οποία το μεγαλύτερο είναι μέσο ανάλογο του όλου και του υπολοίπου.
- Το όνομά της Χρυσή τομή οφείλεται στο Leonardo da Vinci που πρώτος αναφέρθηκε σε αυτή ως Sectio Aurea.

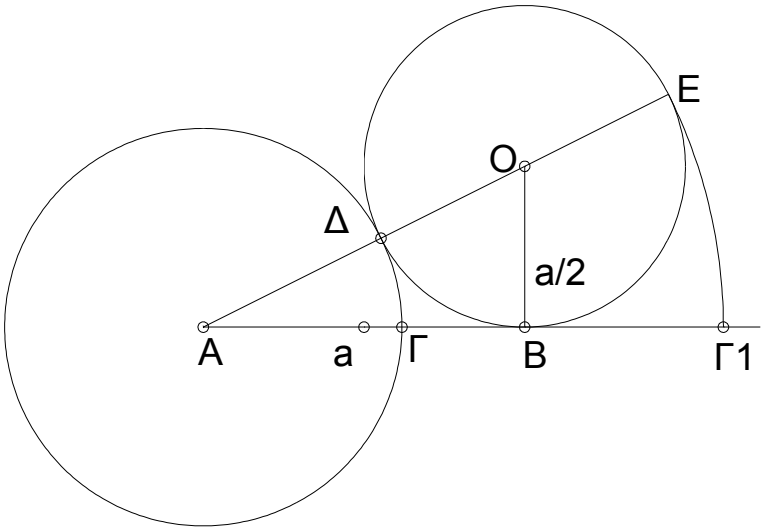
Υπολογισμός του Φ

- Έστω ΑΒ=α ένα δοθέν ευθύγραμμο τμήμα. Ζητείται να βρεθεί ένα σημείο Γ εσωτερικό ή εξωτερικό των Α και Β, τέτοιο ώστε να ισχύει: ΑΒ/ΑΓ=ΑΓ/ΓΒ.
- Θεωρώντας $\chi=ΑΓ/\chi^2=\alpha(\alpha-\chi)$ ή $\chi^2+\alpha\chi-\alpha^2=0$. Η εξίσωση δίνει αλγεβρικά τις λύσεις $\chi=\alpha(\sqrt{5}-1)/2$ και $\chi=\alpha(\sqrt{5}+1)/2$ που αντιστοιχούν
- **$\Phi=(\sqrt{5}+1)/2\cong1,618$** και **$\Phi= =(\sqrt{5}-1)/2\cong0,618$**.
- Στη πρώτη λύση, το ζητούμενο σημείο Γ είναι εντός των Α και Β. Η δεύτερη είναι αρνητική και μπορεί να θεωρηθεί το Γ ως σημείο εκτός των Α και Β.
- Και στις δύο περιπτώσεις ο λόγος του μεγαλυτέρου προς το μικρότερο τμήμα θα είναι ίσος με το «χρυσό» αριθμό Φ.
-



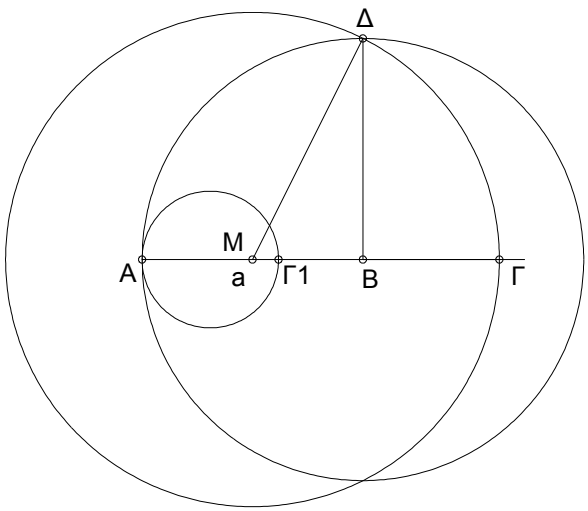
Γεωμετρική κατασκευή του Φ
I

- Λαμβάνουμε ευθύγραμμο σχήμα ΑΒ=α
- Φέρνουμε στο σημείο Β κάθετο και παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΟΒ=α/2.
- Σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ=α/2.
- Φέρνουμε την ευθεία ΑΟ η οποία τέμνει το κύκλο στα σημεία Δ και Ε.
- Με κέντρο το Α σχεδιάζουμε κύκλους με ακτίνα ΑΔ και ΑΕ
- Τα σημεία τομής των κύκλων με την ΑΒ (Γ και Γ1) δίνουν τη ζητούμενη χρυσή τομή και χωρίζουν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ εσωτερικά (Γ) και εξωτερικά (Γ1) σε μέσο και άκρο λόγο Φ .



Γεωμετρική κατασκευή του Φ
II

- Λαμβάνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α.
- Στο σημείο Β φέρνουμε την ΒΔ κάθετη στην ΑΒ έτσι ώστε ΒΔ=ΑΒ=α.
- Από το μέσο Μ της ΑΒ φέρνουμε τη ΜΔ και σχεδιάζουμε κύκλο με κέντρο το Μ και ακτίνα ΜΔ (Μ, ΜΔ).
- Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β και λαμβάνουμε το σημείο Γ (τομή με τον κύκλο).
- Το ΒΓ είναι το μεγαλύτερο από τα δύο τμήματα της χρυσής τομής.
- Ορίζουμε επί της ΑΒ σημείο Γ1 έτσι ώστε ΑΓ1=ΒΓ.
- Το σημείο Γ1 είναι το ζητούμενο.
-

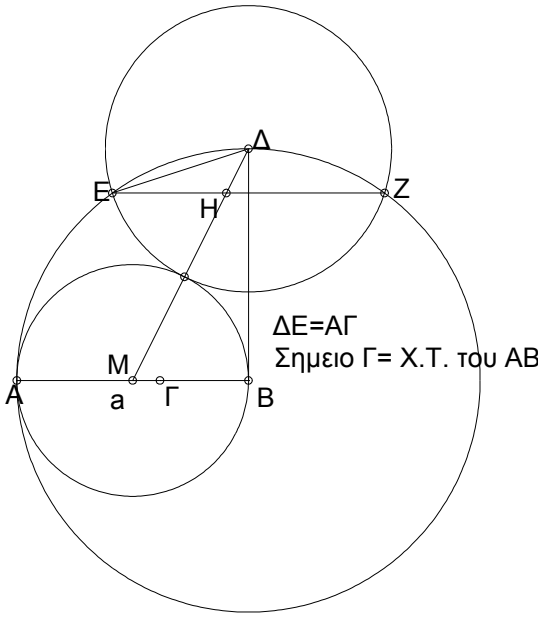


Γεωμετρική κατασκευή του Φ III

- Λαμβάνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α το οποίο θέλουμε να ορίσουμε το μέσο και άκρο λόγο.
- Ορίζουμε Μ το μέσον του και κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το Μ και ακτίνα ΜΑ (Μ,ΜΑ) και κύκλο με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΑ (Β,ΒΑ), που εφάπτονται στο Α.
- Σχεδιάζουμε την εφαπτομένη του κύκλου (Β,ΒΑ), στο Β η οποία τέμνει τον κύκλο (Β,ΒΑ) στο σημείο Δ.
- Με κέντρο το Δ κατασκευάζουμε κύκλο εφαπτόμενο στον κύκλο (Μ,ΜΑ) και τέμνει τον κύκλο (Β,ΒΑ) στα σημεία Ε και Ζ.
- Η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Δ είναι ίση με το μεγαλύτερο από τα δύο τμήματα της χρυσής τομής του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.
- Ορίζουμε επί της ΑΒ τμήμα ίσο με την ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Δ και βρίσκουμε το σημείο Γ το οποίο είναι η χρυσή τομή του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

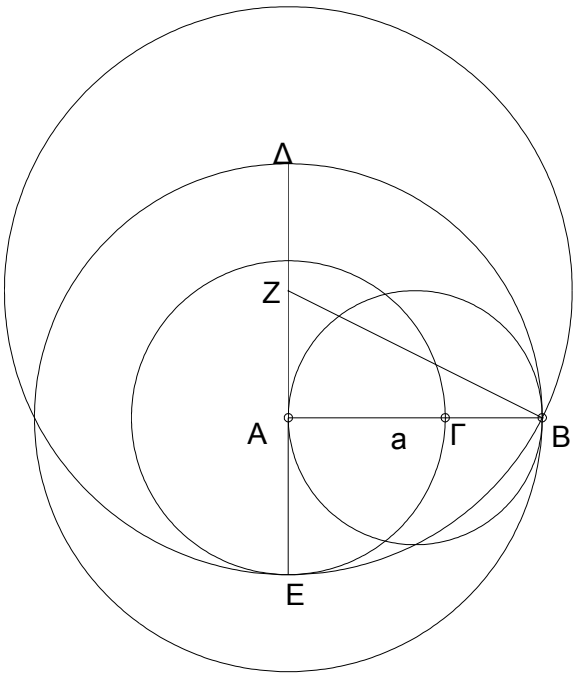
Το σημείο τομής (Θ) της ΕΖ με τη ΜΔ είναι η χρυσή τομή της ΕΖ που είναι η κοινή τομή των δύο κύκλων.

Η ΕΖ είναι ταυτόχρονα και η πλευρά κανονικού πενταγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (Β,ΒΑ).



Γεωμετρική κατασκευή του Φ IV

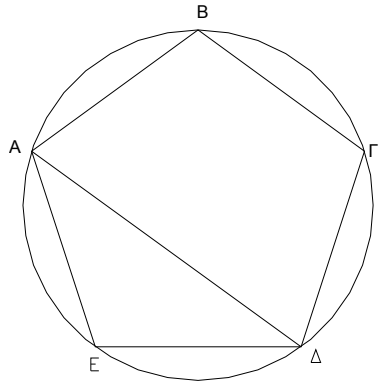
- Λαμβάνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α το οποίο θέλουμε να ορίσουμε το μέσο και άκρο λόγο.
- Σχεδιάζουμε τμήμα ΑΔ=ΑΒ κάθετο στο Α.
- Θεωρούμε το σημείο Ζ μέσο του ΑΔ.
- Σχεδιάζουμε την ΖΒ και λαμβάνουμε επί της ΑΔ σημείο Ε έτσι ώστε ΖΕ=ΖΒ. Πάνω στη ΑΒ ορίζουμε σημείο Γ έτσι ώστε ΑΓ=ΑΕ.
- Το σημείο Γ είναι το ζητούμενο.



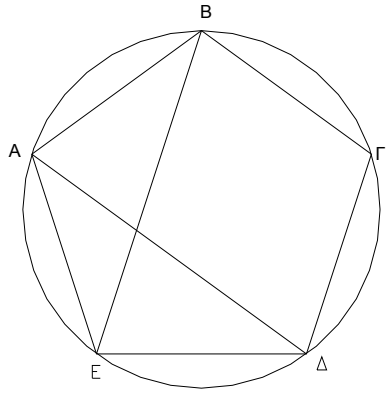
Οι ιδιότητες των πενταγώνων και η χρυσή τομή

- Στα γεωμετρικά στοιχεία του κανονικού πενταγώνου, η χρυσή τομή εμφανίζεται επανειλημμένα
- Η γραμμική κατασκευή του κανονικού πενταγώνου οδήγησε τους Πυθαγόρειους στη ανακάλυψη του άρρητου χρυσού αριθμού Φ που αντιστοιχεί στο λόγο της Χρυσής Τομής.
- Μερικές από τις ιδιότητες του πενταγώνου είναι:

-Η αναλογία μεταξύ μιας διαγωνίου του πενταγώνου προς τη πλευρά του είναι αναλογία χρυσής τομής.



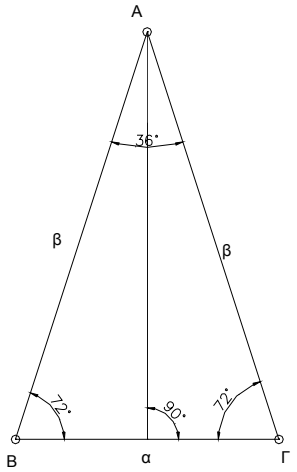
-Το σημείο τομής δύο διαγωνίων κανονικού πενταγώνου είναι στη θέση της χρυσής τομής. Δηλαδή δύο διαγώνιοι διαιρούνται και τέμνονται σε μέσο και άκρο λόγο.



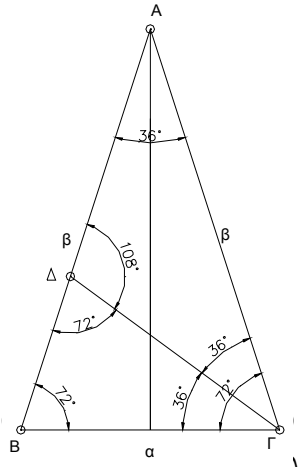
-Οι ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου στο κανονικό πεντάγωνο έχουν σχέση 2/Φ

Το Χρυσό τρίγωνο

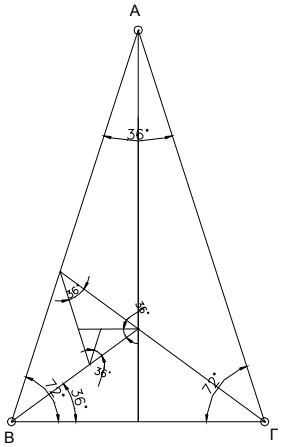
Χρυσό τρίγωνο θεωρείται το ισοσκελές με γωνία βάσης 72°και γωνία κορυφής 36°. Ονομάζεται χρυσό διότι ο λόγος της μιας από τις ίσες πλευρές του ως προς τη βάση είναι λόγος χρυσής τομής.

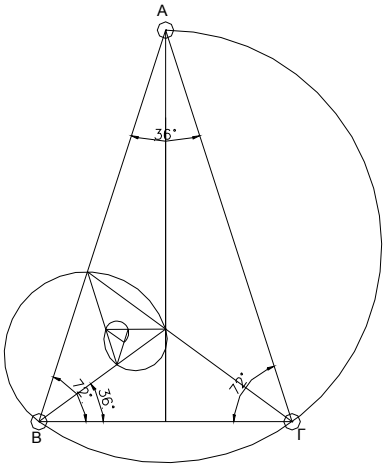


Αν διχοτομήσουμε μία από τις γωνίες της βάσης του, θα σχηματίσου με (λόγω του θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου) μία άλλη χρυσή τομή: ΔΑ/ΔΒ=β/α=Φ



Αν συνεχίσουμε τη διχοτόμηση των γωνιών σχήμα και συνδέσουμε με τόξα τις κορυφες των ισοσκελών τριγώνων, θα σχηματιστεί τελικά μια χρυσή σπείρα.

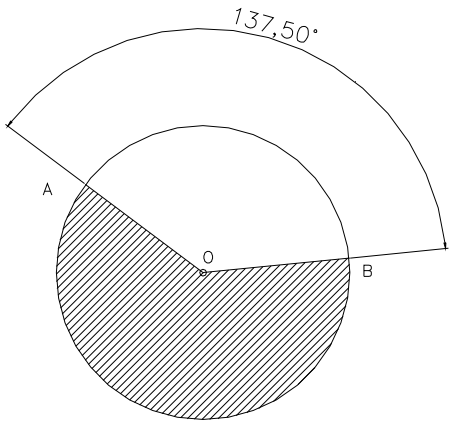




Η Χρυσή γωνία

- Δυνατότητα χάραξης της χρυσής τομής έχουμε και κυκλικές κατασκευές, αρκεί να διαιρέσουμε τη περιφέρεια του κύκλου σε δύο τόξα των οποίων ο λόγος να είναι Φ.

- Η κατασκευή για τον ορισμό των δύο τόξων μπορεί να γίνει γεωμετρικά αλλά η πιο εύκολη μέθοδος είναι να ορίζουμε ένα τόξο με γωνία στο κέντρο του κύκλου **137.5°.**

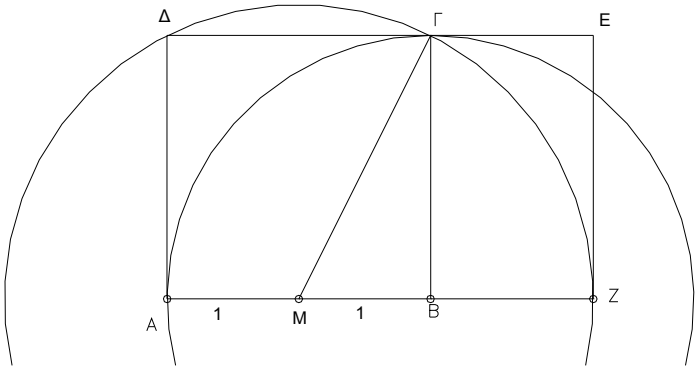


Το Χρυσό ορθογώνιο

- **Χρυσό ορθογώνιο** θεωρείται εκείνο που οι πλευρές του έχουν λόγο Φ.

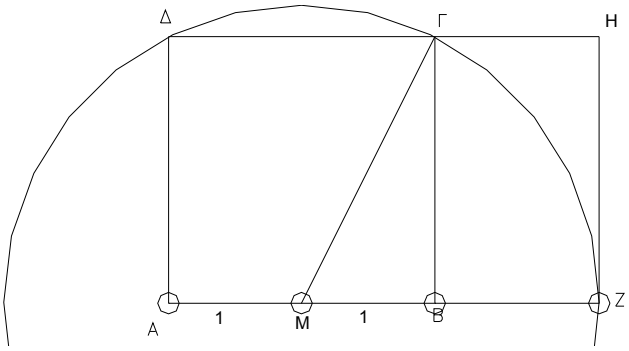
Η κατασκευή του είναι σχετικά απλή:

- κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους δύο μονάδων.
- Με πλευρά ΑΒ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και με κέντρο το Μ σχεδιάζουμε κύκλο ακτίνας ΜΓ (Μ,ΜΓ), που τέμνει τη προέκταση του ΑΒ στο Ζ.
- Σχεδιάζουμε τη ΖΕ κάθετη στη ΑΖ που τέμνει τη προέκταση της ΔΓ στο Ε.
- Το νέο ορθογώνιο ΑΖΕΔ έχει πλευρές ΑΖ=√5 και ΑΔ=2, οι οποίες έχουν λόγο **ΑΖ/ΑΔ=(√5 +1)/2=Φ** που σημαίνει ότι είναι χρυσό ορθογώνιο επειδή από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΓ, η ακτίνα ΜΓ=ΜΖ είναι ίση με √5 και κατ'επέκταση ΑΖ=ΑΜ+ΜΖ= √5 +1.
-



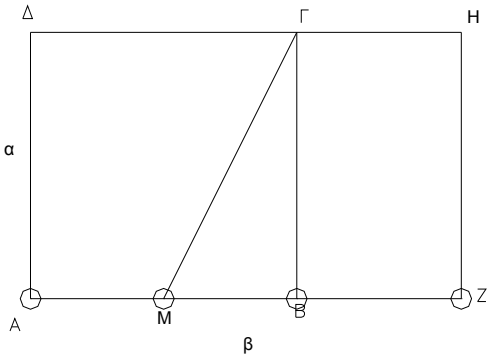
Το Χρυσό ορθογώνιο κατασκευή ΙΙ

- Σχεδιάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και λαμβάνουμε Μ το μέσο της ΑΒ.
- Με κέντρο το Μ και με ακτίνα ΜΓ κατασκευάζουμε τόξο κύκλου που τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ζ.
- Σχεδιάζουμε τη ΖΗ κάθετη στη ΑΖ που τέμνει τη προέκταση της ΔΓ στο Η.

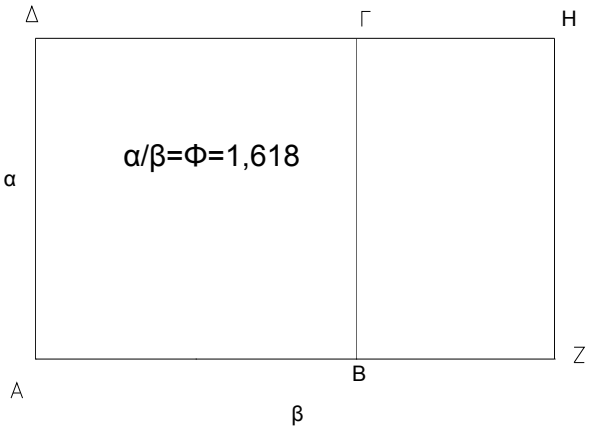


Το ορθογώνιο ΑΖΗΔ
που σχεδιάσαμε είναι
ένα χρυσό ορθογώνιο,
διότι ΑΖ=ΑΜ+ΜΖ=ΑΜ+ΜΓ=
$\alpha/2+\alpha\sqrt{(\alpha/2)^2+\alpha^2}=\alpha/2+\alpha\sqrt{5}/2=\alpha(\sqrt{5}+1)/2=\alpha\Phi$.

$\alpha/\beta=\Phi=1{,}618$



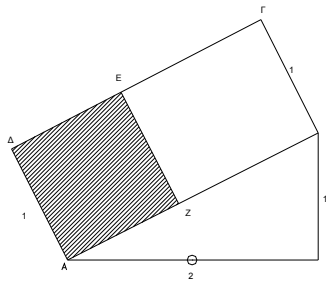
Το Χρυσό ορθογώνιο: ιδιότητες

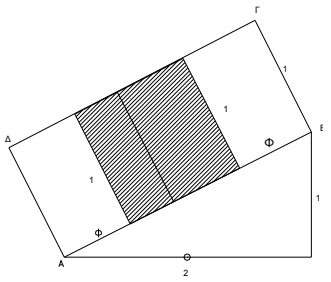


- Ένα ορθογώνιο του οποίου οι πλευρές του έχουν λόγο Φ θεωρείται **Χρυσό ορθογώνιο.**

- Αν σε ένα χρυσό ορθογώνιο κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο, τότε το ορθογώνιο που απομένει είναι και αυτό χρυσό.

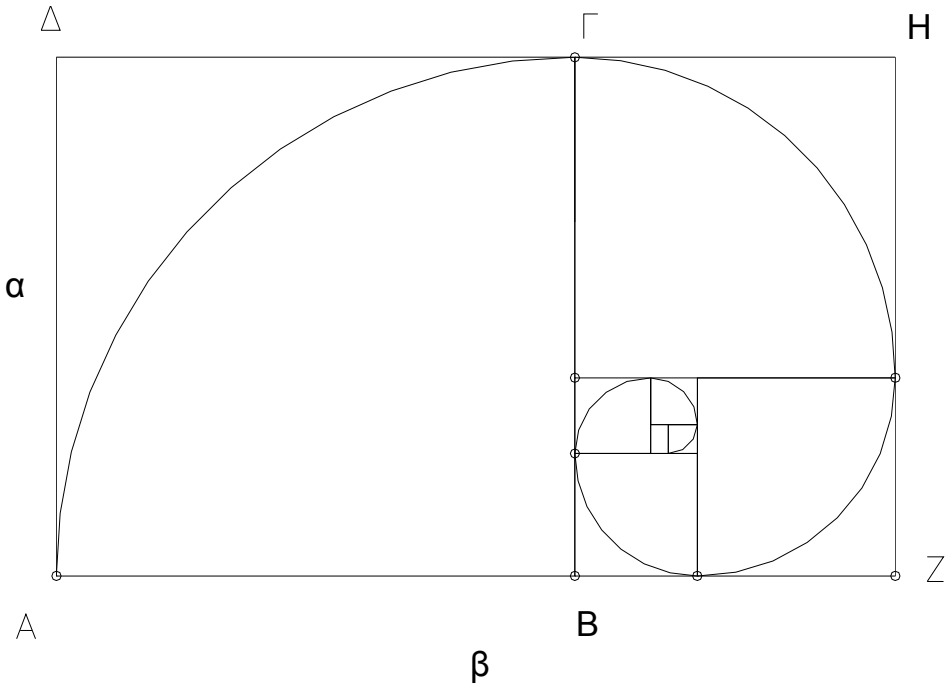
- Αν κατασκευάσουμε ορθογώνιο με πλάτος 1 και μήκος √5 (υποτείνουσα τριγώνου με πλευρές 1και 2), και στο κέντρο του κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο, τότε τα δύο ορθογώνια που απομένουν δεξιά και αριστερά με πλάτος (√5-1)/2=Φ και ύψος τη μονάδα.





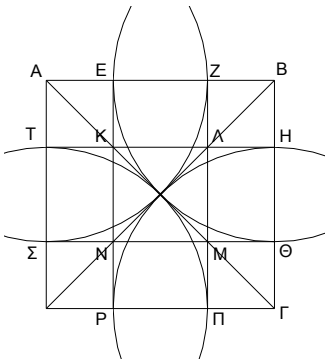
Το Χρυσό ορθογώνιο η χρυσή σπείρα

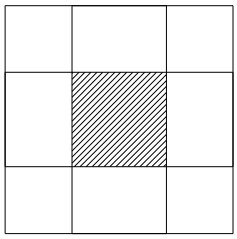
- Σχεδιάζοντας ένα χρυσό ορθογώνιο, υπάρχει μια φυσική ακολουθία εσωτερικών χρυσών ορθογωνίων που μπορούν να σχεδιαστούν υποδιαιρώντας το αρχικό χρυσό ορθογώνιο σε μικρότερα. Το μήκος και το πλάτος του ν-στού ορθογωνίου μας δίνει μια σχέση της μορφής α+βΦ, όπου α και β είναι αριθμοί Fibonacci.
- Στα διαδοχικά χρυσά ορθογώνια, εγγράφεται μια λογαριθμική έλικα η οποία απαντάται συχνά στη φύση όπως στο κέλυφος του σαλιγκαριού, του ναυτίλου, στα πρότυπα διάταξης των σπόρων των ηλίανθων κ.α.
-

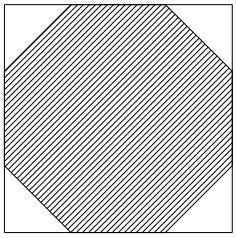
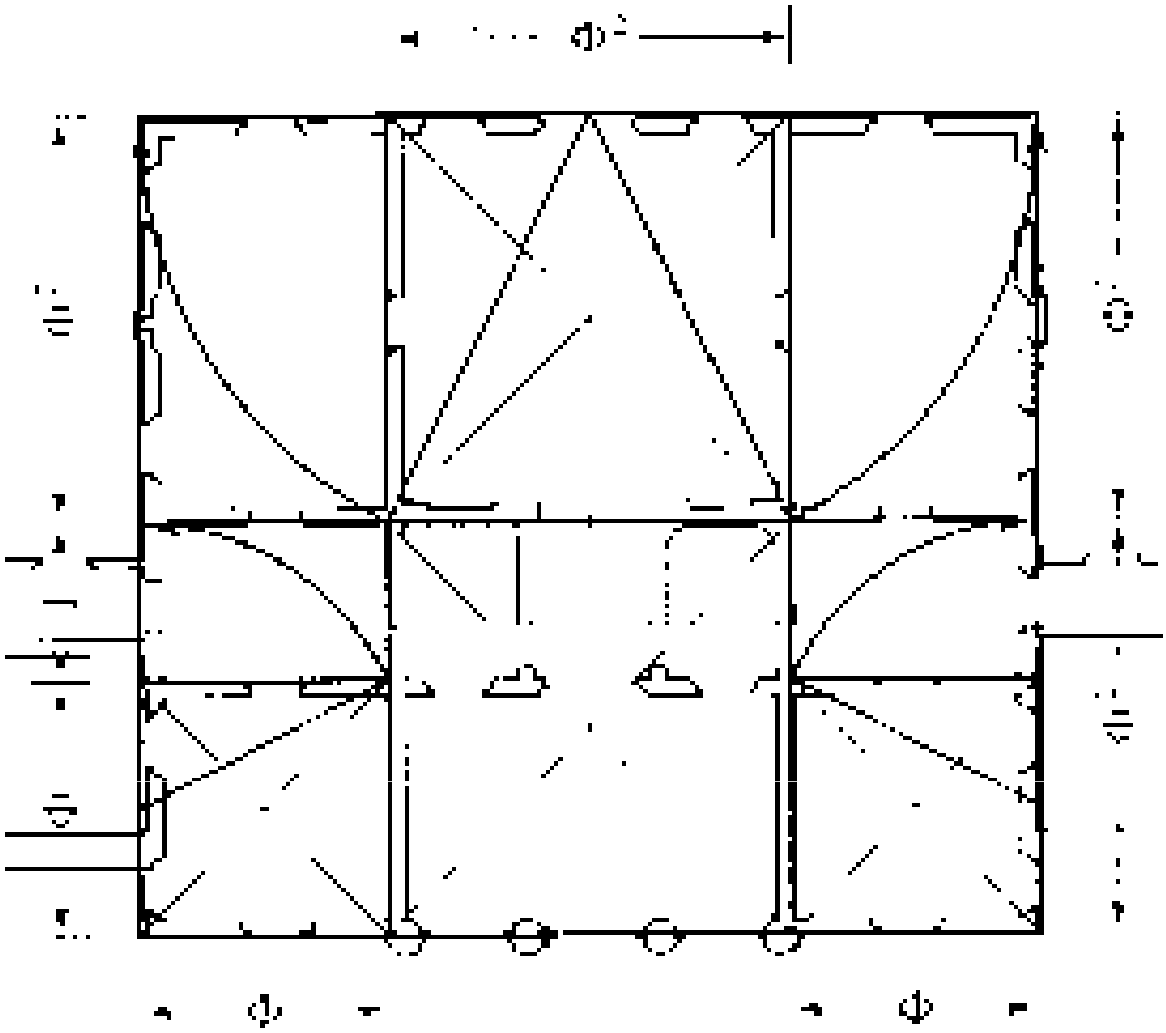


Η Ιερή τομή

- Σημαντική γεωμετρική κατασκευή για τη σύνθεση πολλών σχεδίων κτηρίων της αρχαιότητας είναι η χρυσή (ιερή) τομή. Ονομάστηκε έτσι από το Δανό μηχανικό Tons Brunes.
- Κατασκευή:
- Σχεδιάζουμε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 1
- Με κέντρο τη κορυφή Α του τετραγώνου και με ακτίνα ίση με το μισό της διαγωνίου σχεδιάζουμε τόξο που τέμνει σε δύο σημεία τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ στα σημεία Ζ και Σ.
- Σχεδιάζουμε την ίδια κατασκευή από τις άλλες τρεις κορυφές του τετραγώνου και ορίζουμε τα σημεία Τ,Ε,Η,Θ,Π,Ρ.
- Σχεδιάζουμε τις ευθείες ΕΡ, ΖΠ, ΤΗ, ΣΘ που ενώνουν ανά δύο τα απέναντι σημεία τομής τόξων με τις πλευρές του τετραγώνου και σχεδιάζεται το κεντρικό τετράγωνο ΚΛΜΝ που καλείται τετράγωνο της ιερής τομής.
- Συνδέοντας τα ΤΕΖΗΘΠΡΣΤ σχεδιάζεται ένα κανονικό οκτάγωνο.







Οι αναλογίες της Villa Emo (Palladio).